Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου

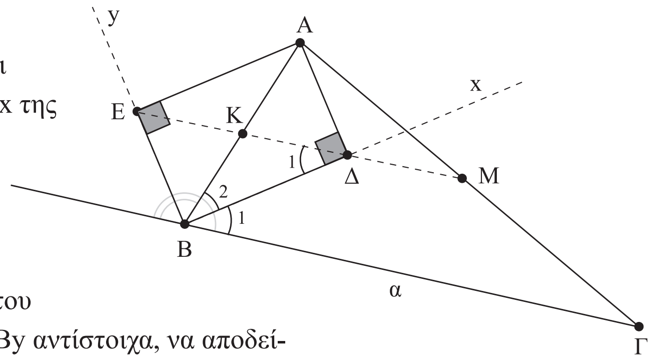
Απαντήσεις στα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων

(ΘΕΜΑ 4: 4650, 4640, 4643, 4645, 4626, 4622, 4619, 4757, 4646, 4767, 4769, 4651, 4652, 4653, 4648, 4571, 4655, 4756, 4753, 4630, 4635, 4735, 4737, 4765, 4649.
ΘΕΜΑ 2: 5588, 5597, 5593, 5635, 5590, 5589, 5587, 5580, 5578, 5595, 5582, 5577, 5581, 5574, 5592, 5575, 5586, 5573, 5607, 5646, 5583, 5591, 5585, 5572, 5599.)

Συγγραφή απαντήσεων: Αθανάσιος Τσιούμας

Χρησιμοποιήστε τους σελιδοδείκτες (bookmarks) στο αριστερό μέρος της οθόνης για την πλοήγηση μέσα στο έγγραφο.

ΘΕΜΑ 4



Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = ΒΓ$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η $ΕΒ \perp ΒΔ$ ως διχοτόμος δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών άρα $Ε\widehat{Β}Δ = 90°$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες ($\widehat{Ε} = \widehat{Δ} = Ε\widehat{Β}Δ = 90°$).

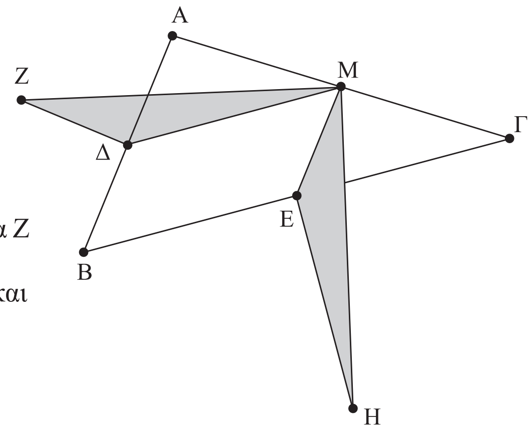
β) Επειδή το ΕΒΔΑ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές (ΚΒ = ΚΔ) οπότε $\widehat{Β}_2 = \widehat{Δ}_1$, επίσης $\widehat{Β}_1 = \widehat{Β}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος της $\widehat{Β}$. Επομένως $\widehat{Β}_1 = \widehat{Δ}_1$ που σημαίνει ότι ΚΔ // ΒΓ ($\widehat{Β}_1$, $\widehat{Δ}_1$ εντός εναλλάξ).

Αφού ΚΜ // ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Κ της ΑΒ άρα θα διέρχεται και από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Είναι ΚΜ // ΒΓ άρα το ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Η διάμεσός του είναι ίση με

$$\frac{ΚΜ + ΒΓ}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2} + \alpha}{2} = \frac{\frac{3\alpha}{2}}{2} = \frac{3\alpha}{4}.$$

ΘΕΜΑ 4



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Β και γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{Α} = 90°$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i. Επειδή Δ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οπότε $ΔΜ =// \frac{ΒΓ}{2}$ ή ΔΜ =// ΒΕ (Ε το μέσο του ΒΓ) άρα το ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.

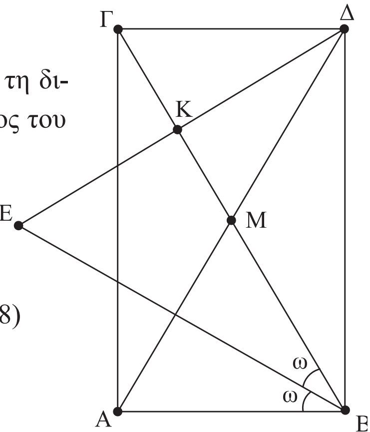
ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ έχουν:

$$ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΕ$$

$$ΔΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΕΗ$$

$Ζ\widehat{Δ}Μ = Μ\widehat{Ε}Η$ διότι $Ζ\widehat{Δ}Μ = 90° + Α\widehat{Δ}Μ = 90° + Μ\widehat{Ε}Γ = Μ\widehat{Ε}Η$ αφού $Α\widehat{Δ}Μ = \widehat{Β}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) και $\widehat{Β} = Μ\widehat{Ε}Γ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά).

β) Αν τα Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά τότε $ΕΔ \perp ΑΒ$ (1) αφού $ΖΔ \perp ΑΔ$, επειδή Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα τότε ΕΔ // ΑΓ (2). Από (1), (2) έχουμε ότι και $ΑΓ \perp ΑΒ$ που σημαίνει ότι $\widehat{Α} = 90°$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$). Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) $K\hat{E}B = 90° - \frac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 8)

γ) ΔΕ = ΒΔ (Μονάδες 9)

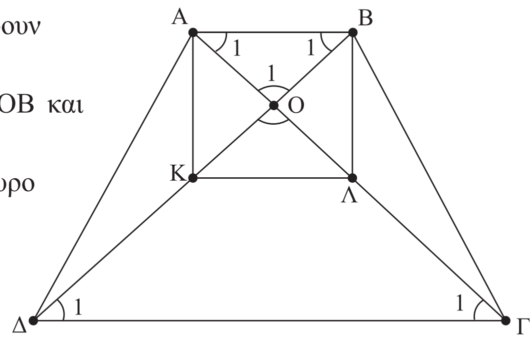
Λύση

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (ΑΜ = ΜΔ και ΒΜ = ΜΓ) και επειδή $\widehat{A} = 90°$ το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $\widehat{K} = 90°$ οπότε από το τρίγωνο ΚΕΒ έχουμε $K\hat{E}B + \omega = 90° \Leftrightarrow K\hat{E}B = 90° - \omega = 90° - \frac{\hat{B}}{2}$ γ) Η γωνία $\Delta\hat{B}E = 90° - \omega = 90° - \frac{\hat{B}}{2} = K\hat{E}B$ (από το ερώτ. β) επομένως το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ισοσκελές, οπότε ΔΕ = ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΔ = ΒΓ, ΑΓ = ΒΔ, και ΑΒ < ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι ΓΔ = 3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

Λύση

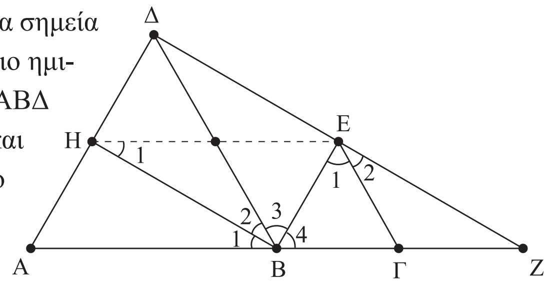
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ίσα (ΑΒ κοινή, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ = ΑΓ) οπότε θα έχουν $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Ομοίως τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ είναι ίσα (Π-Π-Π) άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$ οπότε το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές.

β) Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουμε:
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (κατακορυφήν) και $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και είναι εντός εναλλάξ άρα ΑΒ // ΔΓ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

γ) Το τμήμα ΚΛ που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$ και ΚΛ // ΑΒ άρα το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο και αφού ΑΛ = ΒΔ (ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και ΒΔ), το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4

Σε μία ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ = 2ΒΓ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισόπλευρο, η διάμεσός του ΒΗ θα είναι ύψος άρα ΒΗ $\perp$ ΑΔ (1) και διχοτόμος άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30°$. Είναι $\hat{B}_4 = 60°$ άρα $H\hat{B}E = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180° - \hat{B}_1 - \hat{B}_4$ ή $H\hat{B}E = 180° - 30° - 60° = 90°$ επομένως ΕΒ $\perp$ ΗΒ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

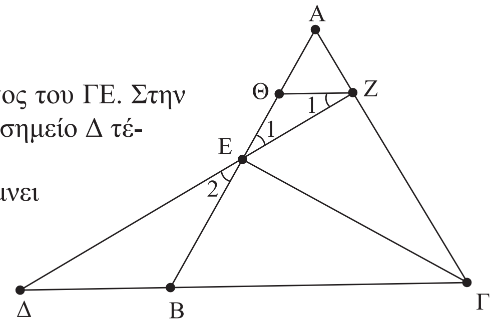
ΗΔ // ΒΕ, επίσης $H\Delta = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{AB}{2} = B\Gamma$ και $B\Gamma = EB$ άρα ΗΔΕΒ παραλληλόγραμμο και αφού $\hat{H} = 90°$ θα είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $\hat{E}_1 = 60°$ (αφού ΕΒΓ ισόπλευρο) και $B\hat{E}Z = 90°$ άρα $\hat{E}_2 = 30°$. Επίσης $\hat{Z} + \hat{B}_4 = 90° \Leftrightarrow \hat{Z} = 90° - 60° = 30°$ άρα το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο η $\hat{H}_1 = \hat{B}_2 = 30° = \hat{B}_1$ και είναι εντός εναλλάξ άρα ΗΕ // ΑΓ που σημαίνει ότι το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο.

Είναι ΕΓ = ΒΓ (αφού ΕΒΓ ισόπλευρο) και $H\Delta = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{AB}{2} = B\Gamma$ άρα ΕΓ = ΗΑ, επομένως το τραπέζιο ΗΕΓΑ θα είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4



Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\mathrm{B\Delta} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ // ΒΓ:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = 2ΘΖ. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι 3ΑΒ = 4ΘΒ. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Επειδή ΓΕ ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θα είναι και διάμεσος δηλαδή $\mathrm{EB} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$. Επίσης $\Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ άρα ΒΔ = ΒΕ (αφού ΑΒ = ΑΓ) οπότε το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

Είναι ΘΖ // ΒΓ άρα $\widehat{\Theta} = \widehat{\mathrm{B}} = 60°$ (εντός εναλλάξ) ομοίως $\Theta\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \widehat{\Gamma} = 60°$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 60°$ επομένως το ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.

β) Έχουμε $\widehat{\mathrm{E}}_2 = \widehat{\Delta} = \frac{60°}{2} = 30°$ επίσης $\widehat{\mathrm{E}}_1 = \widehat{\mathrm{E}}_2 = 30°$ (ως κατακορυφήν) $\widehat{\mathrm{Z}}_1 = \widehat{\Delta} = 30°$ (ως εντός εναλλάξ) και $\mathrm{E}\widehat{\Theta}\mathrm{Z} = 180° - 60° = 120°$.

γ) Αφού $\widehat{\mathrm{E}}_1 = \widehat{\mathrm{Z}}_1 = 30°$ το τρίγωνο ΘΕΖ είναι ισοσκελές άρα ΕΘ = ΘΖ = ΑΘ οπότε $\Theta\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{AE}}{2}$ ή ΑΕ = 2ΘΖ.

δ) Έχουμε $\Theta\mathrm{B} = \mathrm{EB} + \Theta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{AE}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{AB}}{4}$ αφού ($\mathrm{AE} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$) άρα $\Theta\mathrm{B} = \frac{3}{4}\mathrm{AB} \Leftrightarrow 3\mathrm{AB} = 4\Theta\mathrm{B}$.

ΘΕΜΑ 4

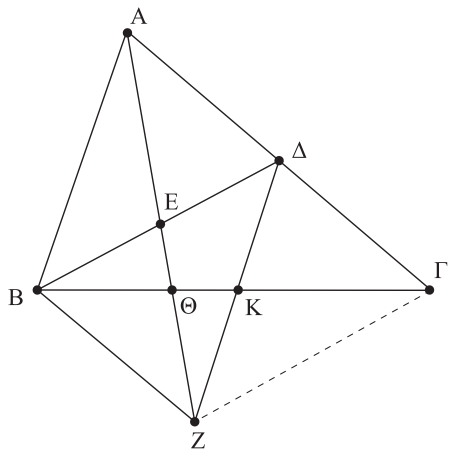
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΖΔ διχοτομούνται (ΑΕ = ΕΖ και ΒΕ = ΕΔ) άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο (από το ερώτ.α) θα έχουμε ΑΔ =// ΒΓ όμως Δ το μέσο του ΑΓ άρα ΔΓ = ΑΔ οπότε ΒΓ =// ΔΓ που σημαίνει ότι το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Έστω ότι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΒΔΓΖ τέμνονται στο Κ τότε το Κ θα είναι το μέσο του ΖΔ επίσης οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΖΔ διχοτομούνται στο Ε επομένως οι ΖΕ και ΒΚ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΒΔΓ οπότε Θ θα είναι το βαρύκεντρό του.

ΘΕΜΑ 4

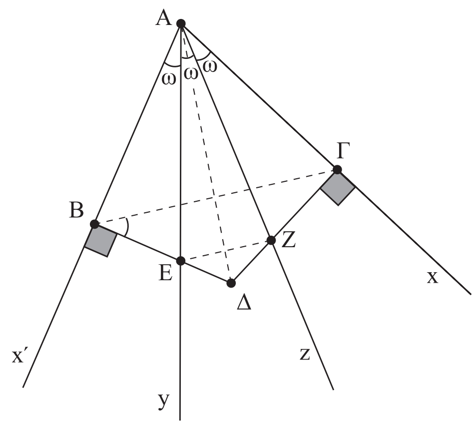
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\widehat{A}x$ θεωρούμε τα σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ.

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\widehat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\widehat{A}x$. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΖΓ είναι ίσα αφού έχουν ΑΒ = ΑΓ και $B\widehat{A}E = Z\widehat{A}\Gamma = \omega$, οπότε ΑΕ = ΑΖ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90°$, ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ κοινή) οπότε $\Delta B = \Delta\Gamma$ και $\Delta B \perp Ax'$, $\Delta\Gamma \perp Ax$ άρα το Δ ισαπέχει από τις πλευρές Ax' και Ax της γωνίας $x'\widehat{A}x$ άρα ανήκει στη διχοτόμο της.

γ) Είναι $\Gamma\widehat{B}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$ διότι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι εγγράψιμο αφού $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90°$ οπότε $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) και $\hat{\Gamma} = 30°$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

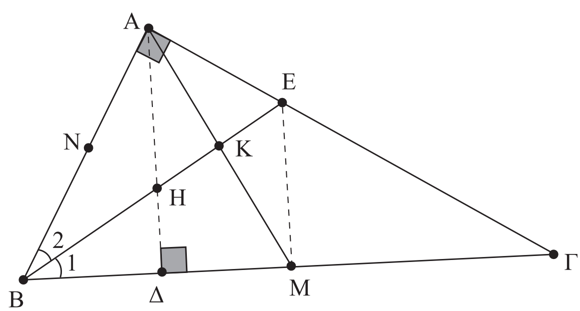
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. (Μονάδες 6)

ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 7)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



Λύση

α) i. Επειδή ΕΜ μεσοκάθετος της ΒΓ το τρίγωνο ΕΒΓ θα είναι ισοσκελές (ΕΒ = ΕΓ) άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 30°$ όμως $\hat{B} = 60°$ άρα $\hat{B}_2 = 30°$ οπότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30°$ επομένως η ΒΕ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ η γωνία $\hat{B}_2 = 30°$ οπότε $AE = \frac{BE}{2} = \frac{E\Gamma}{2}$.

iii. Είναι $\hat{\Gamma} = 30°$ και $\hat{A} = 90°$ οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM$ δηλαδή το τρίγωνο ΒΑΜ είναι ισοσκελές και ΒΕ διχοτόμος της $\hat{B}$ άρα ΒΕ μεσοκάθετος της ΑΜ (αφού θα είναι ύψος και διάμεσος).

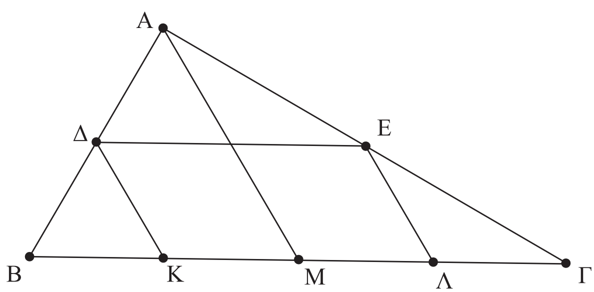
β) Τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ, ΑΒ αντίστοιχα, άρα ΜΝ // ΑΓ όμως $A\Gamma \perp AB$ οπότε και $MN \perp AB$ επομένως τα ΜΝ, ΑΔ και ΒΚ (Κ σημείο τομής των ΑΜ και ΒΕ) θα είναι τα ύψη του τριγώνου ΑΒΜ, οπότε το Η θα είναι το ορθόκεντρο του, που σημαίνει ότι τα Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε ΒΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ ισούται με $\frac{3}{8}ΒΓ$. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα οπότε ΔΕ //= $\frac{ΒΓ}{2}$ όπου $\frac{ΒΓ}{2} = ΚΛ$ αφού ΒΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ επομένως ΔΕ //= ΚΛ που σημαίνει ότι το ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή τα Δ, Κ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΜ αντίστοιχα άρα ΔΚ =// $\frac{ΑΜ}{2}$ (1), επίσης $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ (ΑΜ η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ) οπότε $ΔΓ = \frac{ΒΓ}{4}$ επομένως η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ ισούται με

$$\frac{ΔΚ + ΑΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{4} + \frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{\frac{3ΒΓ}{4}}{2} = \frac{3}{8}ΒΓ$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΔΓ) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και ΑΒ = ΒΓ = ΑΔ = $\frac{\Gamma\Delta}{2}$.

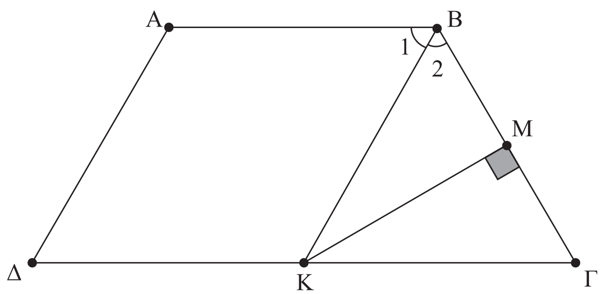
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ (εντός και επί τα αυτά μέρη) και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ άρα $2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow$ $3\hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60°$ οπότε $\hat{B} = 120°$. Επίσης $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60°$ (αφού ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο) και $\hat{A} = \hat{B} = 120°$.

β) i. Έχουμε $\hat{B}_1 = \frac{120°}{2} = 60°$ και $\hat{A} = 120°$ οπότε $\hat{A} + \hat{B}_1 = 180°$ που σημαίνει ότι ΒΚ // ΑΔ επίσης ΑΒ // ΔΚ άρα το ΑΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο με ΑΒ = ΑΔ άρα είναι ρόμβος.

ii. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές αφού $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma} = 60°$ οπότε το ύψος του ΚΜ θα είναι και διάμεσος, άρα Μ το μέσο του ΒΓ.

ΘΕΜΑ 4

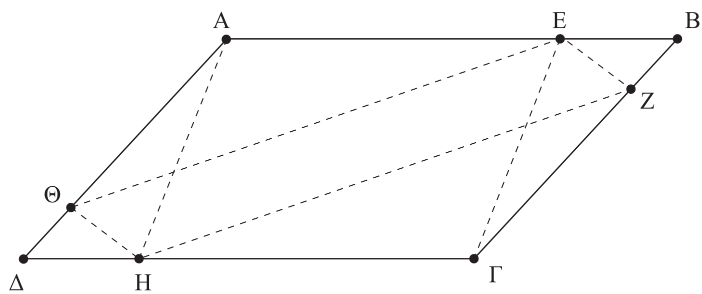
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι ΑΕ = ΓΗ και ΑΕ // ΓΗ (αφού ΑΒ // ΓΔ) άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΘ και ΓΗΖ είναι ίσα αφού έχουν: ΑΕ = ΓΗ, ΑΘ = ΓΖ (επειδή ΔΘ = ΒΖ και ΑΔ = ΒΓ) και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ άρα από την ισότητα προκύπτει ότι ΕΘ = ΖΗ (1).
Ομοίως τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΔΗΘ είναι ίσα (ΔΘ = ΒΖ, ΔΗ = ΕΒ και $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$) άρα ΕΖ = ΘΗ (2).
Από (1), (2) έχουμε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα ΑΓ, ΒΔ έχουν κοινό μέσο που θα είναι και κοινό μέσο των ΑΓ, ΕΗ (ΑΕΓΗ παραλ/μο) καθώς και κοινό μέσο των ΕΗ, ΖΘ (αφού ΕΖΗΘ παραλ/μο). Επομένως τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

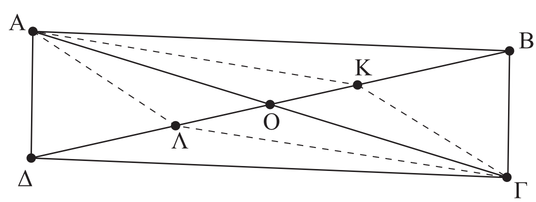
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια ώστε να ισχύει ΒΚ = ΚΛ = ΛΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται άρα ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ όμως ΔΛ = ΚΒ άρα ΟΛ = ΟΚ οπότε το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται.

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε ΑΓ ⊥ ΒΔ άρα και ΑΓ ⊥ ΚΛ που σημαίνει ότι και το ΑΚΓΛ θα είναι ρόμβος.

γ) Για να είναι το ΑΚΓΛ ορθογώνιο πρέπει ΚΛ = ΑΓ όμως $ΚΛ = \frac{ΒΔ}{3}$ άρα πρέπει $\frac{ΒΔ}{3} = ΑΓ \Leftrightarrow ΒΔ = 2ΑΓ$

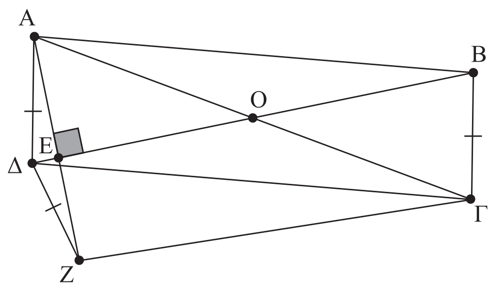
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ. Εάν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΖΓ = 2ΟΕ (Μονάδες 9)

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Η ΔΕ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΔΑΖ άρα αυτό είναι ισοσκελές.

β) Είναι Ε, Ο τα μέσα των ΑΖ και ΑΓ αντίστοιχα άρα ΟΕ =// $\frac{ΖΓ}{2}$ ή ΖΓ =// 2ΟΕ.

γ) Από το ερώτ.β έχουμε ΖΓ // ΔΒ άρα το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι τραπέζιο που είναι ισοσκελές διότι ΒΓ = ΑΔ (ΑΒΓΔ παραλ/μο) και ΑΔ = ΔΖ άρα ΒΓ = ΔΖ.

ΘΕΜΑ 4

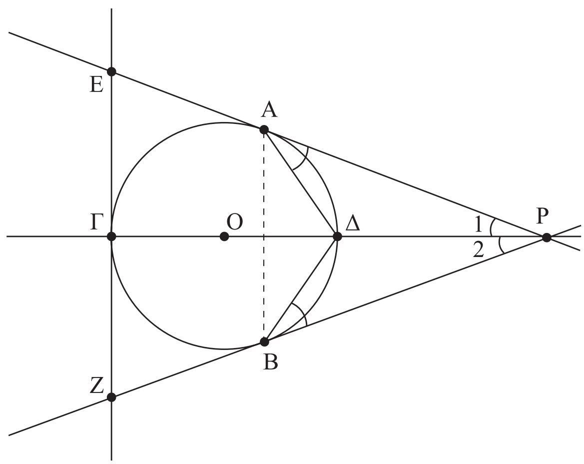
Από το εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ και τη διακεντρική ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$ (Μονάδες 8)

β) ΕΑ = ΖΒ (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΡΑΔ και ΡΒΔ έχουν:

ΡΑ = ΡΒ (ως εφαπτόμενα τμήματα)

ΡΔ κοινή

$\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (διότι η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B$)

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$

β) Το τρίγωνο ΡΕΖ είναι ισοσκελές διότι το ύψος ΡΓ είναι και διχοτόμος άρα ΡΕ = ΡΖ επίσης ΡΑ = ΡΒ επομένως ΕΑ = ΖΒ.

γ) Έχουμε ΡΟ $\perp$ ΑΒ και ΡΓ$\perp$ ΕΖ άρα ΑΒ // ΕΖ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι τραπέζιο και μάλιστα είναι ισοσκελές αφού ΕΑ = ΖΒ από το ερώτ.β.

ΘΕΜΑ 4

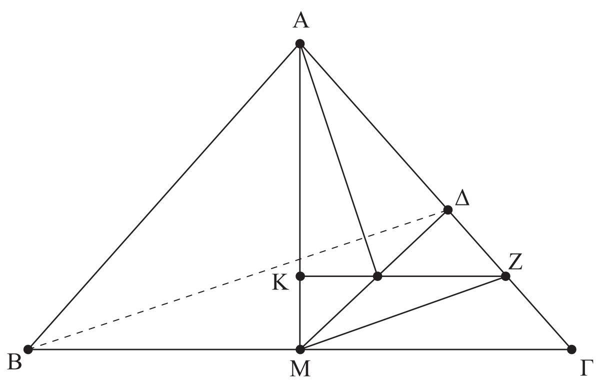
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε Η το μέσο του τμήματος ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΗΖ} = \frac{\text{ΒΓ}}{4}$ (Μονάδες 9)

β) ΜΖ // ΒΔ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή Η το μέσο της ΜΔ και ΗΖ // ΜΓ άρα Ζ το μέσο της ΔΓ οπότε $\text{ΗΖ} = \frac{\text{ΜΓ}}{2} = \frac{\text{ΒΓ}}{4}$ αφού $\text{ΜΓ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

β) Έχουμε Μ, Ζ τα μέσα των ΒΓ, ΔΓ αντίστοιχα άρα ΜΖ // ΒΔ.

γ) Είναι ΖΚ $\perp$ ΑΜ και ΜΔ $\perp$ ΑΖ οπότε Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΜΖ επομένως

ΑΗ $\perp$ ΜΖ όμως ΜΖ // ΒΔ (από το ερώτ. β) άρα ΑΗ $\perp$ ΒΔ.

ΘΕΜΑ 4

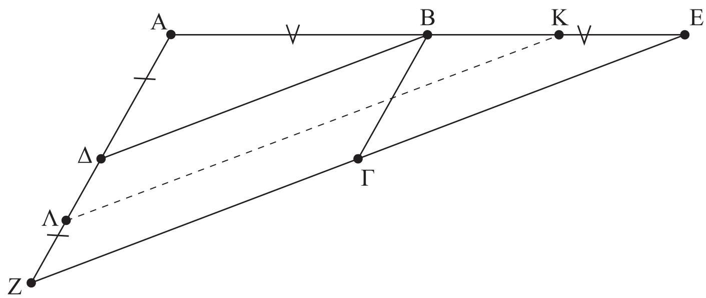
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ // ΔΒ και $ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ$.



Λύση

α) i. Είναι ΒΕ = // ΔΓ (αφού ΒΕ = ΑΒ) οπότε το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ομοίως και το ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο (αφού ΔΖ =// ΒΓ).

ii. Είναι ΓΖ // ΒΔ (αφού ΔΖΓΒ παραλ/μο) και ΓΕ //ΔΒ (αφού ΒΔΓΕ παραλ/μο) οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά (ευκλείδειο αίτημα).

β) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι τραπέζιο (αφού ΔΒ // ΖΓ και Ζ, Γ, Ε συνευθειακά) οπότε η ΚΛ είναι διάμεσος του παραπάνω τραπεζίου οπότε ΚΛ // ΔΒ και

$ΚΛ = \frac{ΔΒ + ΖΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΖΓ + ΓΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΔΒ + ΔΒ}{2} = \frac{3}{2}ΔΒ$ (είναι ΖΓ = ΔΒ και ΓΕ = ΔΒ).

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ = ΒΓ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

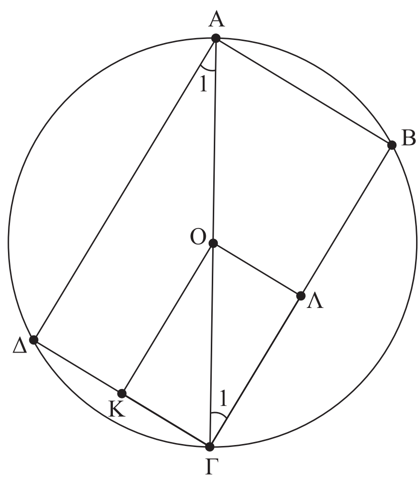
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



Λύση

α) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ αφού ΔΓ = ΑΒ (άρα και τα $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$) οπότε ΑΔ // ΓΒ ($\widehat{A}_1, \widehat{\Gamma}_1$ εντός εναλλάξ).

β) Έχουμε ΑΔ =// ΒΓ οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και μάλιστα ορθογώνιο διότι $\widehat{B} = 90°$ (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο).

γ) Οι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΒΓΔ διχοτομούνται και είναι ίσες οπότε η διαγώνιος ΒΔ θα είναι διάμετρος του κύκλου.

δ) Τα τμήματα ΟΚ και ΟΛ είναι τα αποστήματα των χορδών ΔΓ και ΓΛ αντίστοιχα άρα $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90°$ επίσης $K\widehat{\Gamma}\Lambda = 90°$ (ΑΒΓΔ ορθογώνιο) επομένως το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $B\widehat{A}\Gamma = 60°$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

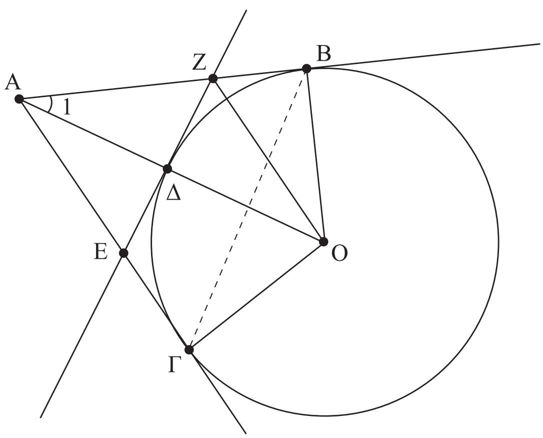
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με ΟΑ = 2ΟΒ. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) 2ΖΒ = ΑΖ (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



Λύση

α) Είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90°$ δηλαδή $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ οπότε το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ η γωνία $\widehat{A}_1 = 30°$ (ΑΟ διχοτόμος της $B\widehat{A}\Gamma$) οπότε $OB = \dfrac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OB$.

β) Η ΑΔ είναι ύψος (ΑΟ ⊥ ΕΖ) και διχοτόμος του τριγώνου ΑΕΖ άρα αυτό είναι ισοσκελές και επειδή $\widehat{A} = 60°$, το τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ η $\widehat{A}_1 = 30°$ άρα $Z\Delta = \dfrac{AZ}{2}$ όμως ΖΔ = ΖΒ ως εφαπτόμενα τμήματα οπότε $ZB = \dfrac{AZ}{2} \Leftrightarrow 2ZB = AZ$.

δ) Έχουμε ΑΟ ⊥ ΒΓ και ΑΟ ⊥ ΕΖ οπότε ΒΓ // ΕΖ που σημαίνει ότι το ΕΖΒΓ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού ΕΓ = ΖΒ (είναι ΑΓ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΖ).

ΘΕΜΑ 4

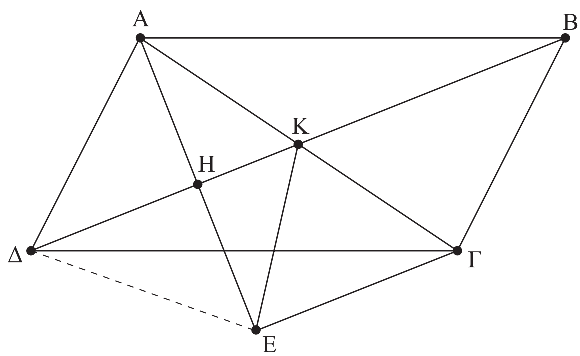
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή η ΚΗ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ άρα ΚΑ = ΚΕ δηλαδή το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.

β) Η ΕΚ είναι διάμεσος του τριγώνου ΕΑΓ και είναι $EK = KA = \frac{A\Gamma}{2}$ άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο ($A\hat{E}\Gamma = 90°$).

γ) Τα Η, Κ είναι τα μέσα των ΑΕ και ΑΓ αντίστοιχα οπότε ΗΚ // ΕΓ άρα ΕΓ // ΔΒ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού ΔΕ = ΒΓ διότι το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ άρα ΔΕ = ΔΑ = ΒΓ.

ΘΕΜΑ 4

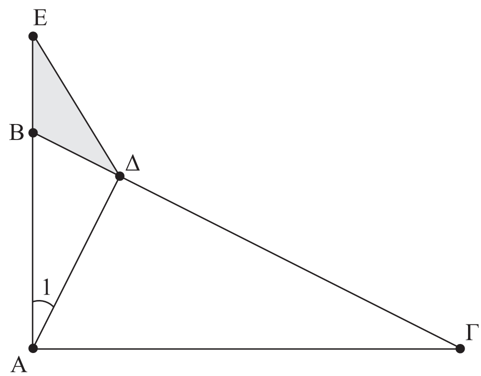
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΕ = ΒΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)

ii. ΑΕ = ΓΔ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ άρα $2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30°$ οπότε $\hat{B} = 60°$ και $\Delta\hat{B}E = 120°$. Είναι $\hat{E} = B\hat{\Delta}E$ άρα $\hat{B} = 2\hat{E} \Leftrightarrow \hat{E} = 30° = B\hat{\Delta}E$.

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ($\hat{\Delta} = 90°$) η γωνία $\hat{A}_1 = 90° - \hat{B} = 30°$ οπότε $B\Delta = \frac{AB}{2}$ όμως ΒΕ = ΒΔ άρα $BE = \frac{AB}{2}$.

ii. Έχουμε:

$AE = AB + BE = AB + \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}AB$ (1) επίσης

$\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta = 2AB - BE = 2AB - \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}AB$ (2) (είναι ΒΓ = 2ΑΒ διότι $\hat{\Gamma} = 30°$).

Από (1), (2) προκύπτει ότι ΑΕ = ΓΔ.

ΘΕΜΑ 4

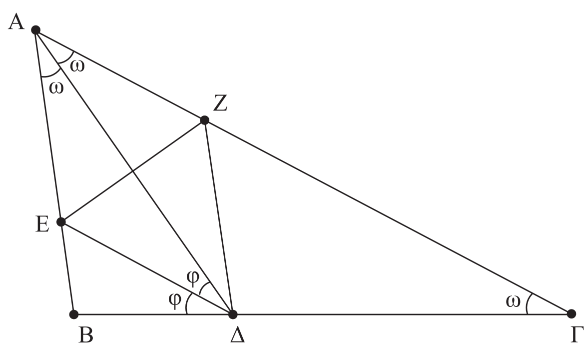
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ΑΔ = ΔΓ. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές άρα $\hat{\Gamma} = \omega$. Η γωνία $B\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}A$ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΔΓ) άρα $2\varphi = \omega + \omega \Leftrightarrow \varphi = \omega$ δηλαδή $E\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}Z$ που σημαίνει ότι ΕΔ // ΑΓ αφού $E\hat{\Delta}A$, $\Delta\hat{A}Z$ εντός εναλλάξ.

β) Αφού $\varphi = \omega \Leftrightarrow E\hat{A}\Delta = E\hat{\Delta}A$ άρα το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι ΕΔ // ΑΖ (από το ερώτ.α) και ΑΕ // ΔΖ (υπόθεση). Επομένως το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο άρα τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.

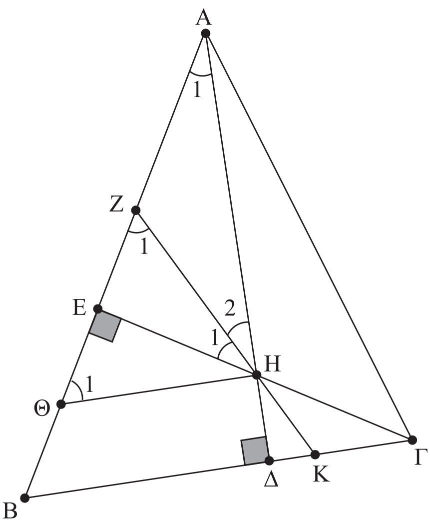
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{B} = 60°$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ΖΕ ισχύει ΖΗ = 2ΕΖ. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η $\hat{B} = 60°$ άρα $\hat{A}_1 = 30°$ οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ θα είναι $E\hat{H}A = 60°$ άρα $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 30°$ επομένως στο τρίγωνο ΕΖΗ ($\hat{E} = 90°$) θα είναι $EZ = \dfrac{ZH}{2}$ ή ΖΗ = 2ΕΖ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΖΗ ($\hat{E} = 90°$) η $\hat{Z}_1 = 60°$. Η γωνία $\hat{\Theta}_1 = \hat{B} = 60°$ (εντός εκτός και επί τα αυτά). Επομένως η γωνία $\Theta\hat{H}Z = 180° - \hat{\Theta}_1 - \hat{Z}_1 = 180° - 60° - 60° = 60°$ άρα το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι ΘΗ // ΒΓ άρα το ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο. Έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{B} = 60°$ άρα και $B\hat{K}H = 60°$ (από το τρίγωνο ΒΖΚ) που σημαίνει ότι το τραπέζιο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές.

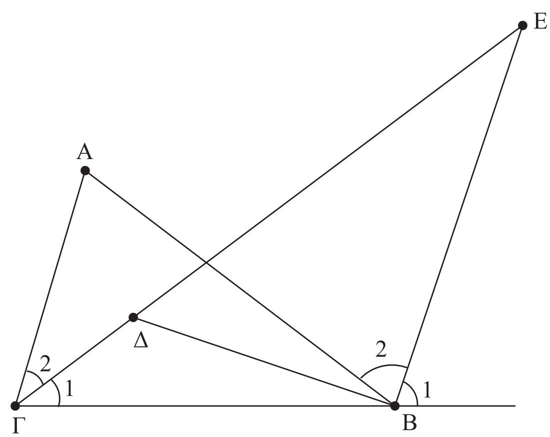
ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Δ. Η εξωτερική διχοτόμος της Β τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε. Δίνεται ότι $A\hat{B}E = 70° = 2\Gamma\hat{E}B$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΕ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $\hat{E} = \dfrac{70°}{2} = 35°$ επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 70°$. Ομοίως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{E}$ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΓΕΒ) άρα $70° = \hat{\Gamma}_1 + 35° \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 35°$ οπότε και $\hat{\Gamma}_2 = 35°$ επομένως $\hat{\Gamma} = 70°$. Η γωνία $\hat{B} = 180° - 140° = 40°$ και $\hat{A} = 180° - 70° - 40° = 70°$.

β) Επειδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 70°$ και είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη άρα ΑΓ // ΒΕ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΕ είναι τραπέζιο.

γ) Έχουμε $\hat{\Gamma}_1 = 35°$ άρα το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.

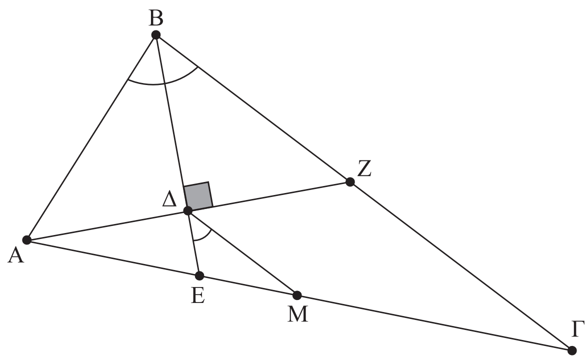
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας Β. Αν $ΑΖ \perp ΒΕ$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $ΔΜ \parallel ΒΓ$ και $ΔΜ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$ (Μονάδες 10)

γ) $Ε\hat{Δ}Μ = \frac{\hat{Β}}{2}$, όπου $\hat{Β}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΑΒΖ άρα αυτό είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΒΖ).

β) Το ύψος ΒΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΖ θα είναι και διάμεσος άρα Δ το μέσο του ΑΖ επίσης Μ το μέσο του ΑΓ άρα $ΔΜ \parallel ΖΓ$ ή $ΔΜ \parallel ΒΓ$ και

$ΔΜ = \frac{ΖΓ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΖ}{2} = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$ (αφού ΑΖ = ΑΒ).

γ) Επειδή $ΔΜ \parallel ΒΓ$ η γωνία $Ε\hat{Δ}Μ = Ε\hat{Β}Γ = \frac{\hat{Β}}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

ΘΕΜΑ 2

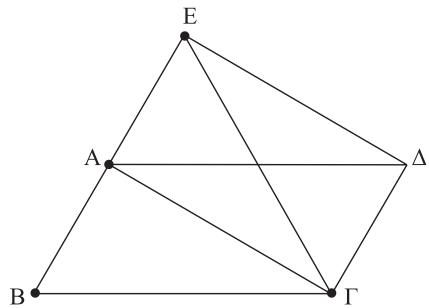
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε ΓΔ = ΑΒ (1) επίσης το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο άρα ισχύει ΓΔ = ΑΕ (2). Από (1), (2) είναι ΑΒ = ΑΕ δηλαδή το Α είναι το μέσο του ΒΕ.

β) Είναι ΓΑ ⊥ ΑΕ διότι το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο, επίσης από το ερώτ.α η ΓΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ, επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

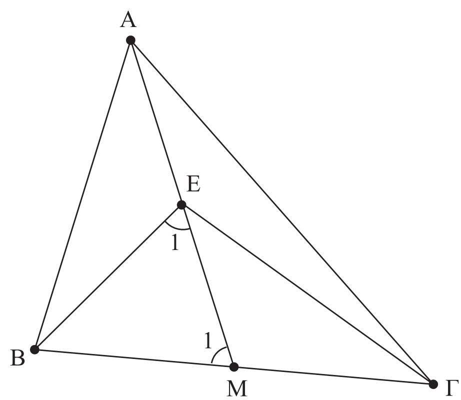
γ) Είναι $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως εντός εναλλάξ (ΑΔ // ΒΓ) και $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$ ως εντός εναλλάξ (ΑΓ // ΕΔ), άρα $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ =2ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$ (Μονάδες 12)

β) ΑΒ = ΕΓ (Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή ΒΓ =2ΒΕ και αφού Μ το μέσο του ΒΓ άρα ΒΕ = ΒΜ δηλαδή το τρίγωνο ΒΕΜ είναι ισοσκελές, επομένως $\hat{E}_1 = \widehat{M}_1$ οπότε $A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$ ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών $\hat{E}_1$ και $\widehat{M}_1$.

β) Τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΜΓ έχουν:

$A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$ (από το ερώτ.α)

ΑΕ = ΕΜ (αφού Μ το μέσο του ΑΜ)

ΕΒ =ΜΓ (αφού $EB = \frac{B\Gamma}{2}$)

οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Γ-Π) άρα θα έχουν και ΑΒ = ΕΓ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

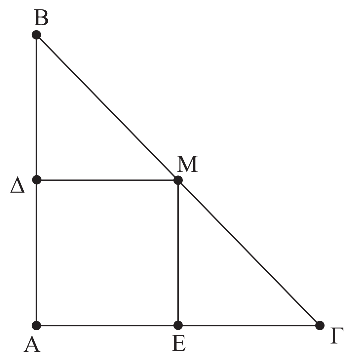
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια, ΜΔ = ΜΕ και ΜΒ = ΜΓ (Μ το μέσο του ΒΓ).

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΒΔΜ και ΓΕΜ προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

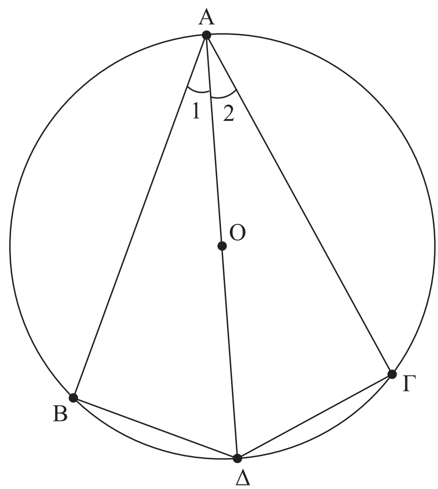
β) Επειδή ΑΒ = ΑΓ το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45°$ οπότε και τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΜ και ΜΕΓ είναι ισοσκελή, άρα $M\Delta = B\Delta = \frac{AB}{2}$ και $ME = E\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$ επομένως ΜΔ = ΜΕ.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (αφού ΑΔ διχοτόμος της $B\widehat{A}\Gamma$) οπότε και τα αντίστοιχα τόξα, $\overset{\frown}{B\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια διότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90°$ (ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο) $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (υπόθεση) και ΑΔ κοινή, επομένως τα παραπάνω τρίγωνα είναι ίσα.

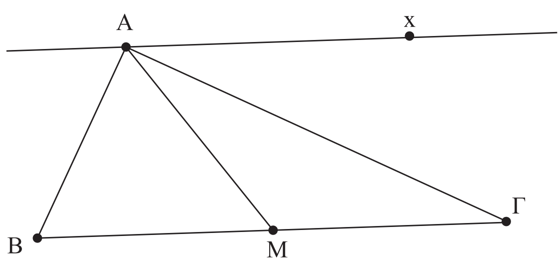
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (σο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

α) $M\widehat{A}\Gamma = M\widehat{\Gamma}A$ (Μονάδες 12)

β) Η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και ΑΜ διάμεσος άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές, οπότε $M\widehat{A}\Gamma = M\widehat{\Gamma}A$.

β) Είναι $M\widehat{\Gamma}A = \Gamma\widehat{A}x$ ως εντός εναλλάξ (αφού Αx // ΒΓ) και από το ερώτ.α προκύπτει ότι $M\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{A}x$ δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}x$.

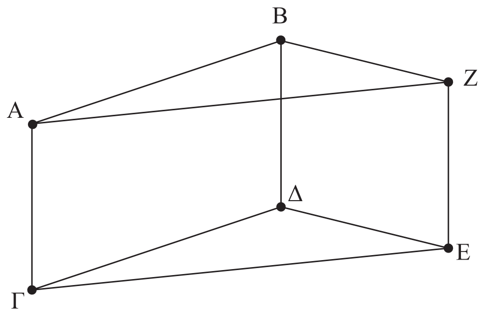
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή τα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμα θα έχουμε ΑΓ =// ΒΔ και ΒΔ =// ΖΕ. Επομένως ισχύει ΑΓ =// ΖΕ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

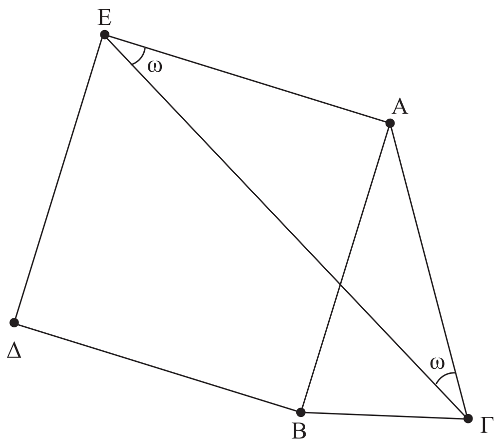
β) Είναι ΑΒ = ΓΔ (αφού ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο) επίσης ΒΖ = ΔΕ (αφού ΒΖΕΔ είναι παραλληλόγραμμο) και ΑΖ =ΓΕ (ΑΓΕΖ παραλληλόγραμμο) άρα από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ είναι ίσα οπότε $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $2\widehat{\text{ΕΓΑ}} = 90° - \widehat{\text{ΒΑΓ}}$ (Μονάδες 15)



Λύση

α) Επειδή το ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο θα ισχύει ΑΕ = ΑΒ όμως ΑΒ = ΑΓ άρα ΑΕ = ΑΓ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.

β) Αφού το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές έχουμε $2\omega + \widehat{\text{ΕΑΓ}} = 180° \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\omega + 90° + \widehat{\text{ΒΑΓ}} = 180° \Leftrightarrow 2\omega = 90° - \widehat{\text{ΒΑΓ}}$ ή $2\widehat{\text{ΕΓΑ}} = 90° - \widehat{\text{ΒΑΓ}}$.

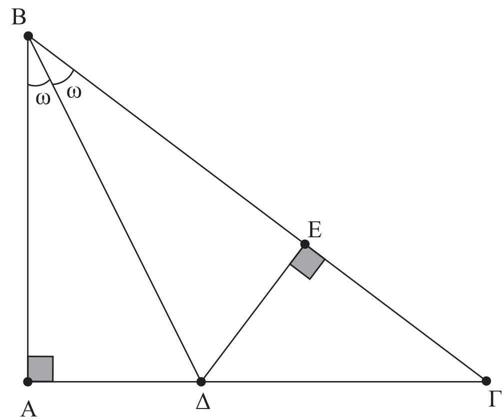
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 8)

β) ΑΔ < ΔΓ (Μονάδες 9)

γ) ΑΓ > ΑΒ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Β άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές της οπότε ΑΔ = ΑΕ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ είναι ΔΕ < ΔΓ (ΔΓ υποτείνουσα) επίσης από το ερώτ.α ΑΔ = ΑΕ, επομένως ΑΔ < ΔΓ.

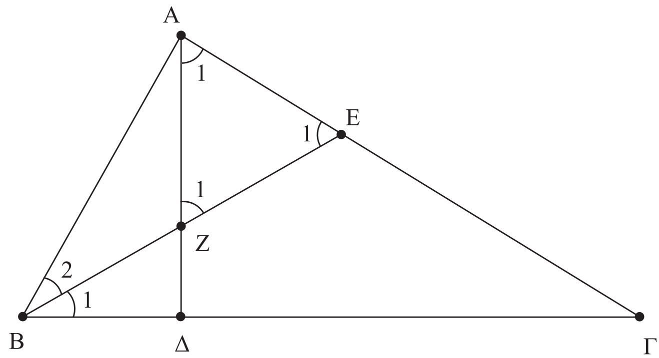
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\hat{\Gamma} < \hat{B}$ άρα ΑΓ > ΑΒ.

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60°. (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Έχουμε $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ (1) επίσης $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ (2). Από (1), (2) προκύπτει $2\hat{B}+\hat{B}=180° \Leftrightarrow 3\hat{B}=180° \Leftrightarrow \hat{B}=60°$.

β) Είναι $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}=120°$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$ άρα $3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120° \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=120° \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30°$ άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\hat{A}_1=60°$. Επίσης $\hat{B}_2=\frac{60°}{2}=30°$ άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ προκύπτει $\hat{E}_1=60°$ επομένως στο τρίγωνο ΑΖΕ είναι και $\hat{Z}_1=60°$ δηλαδή το ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 2

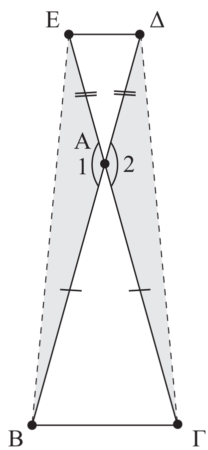
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΓΔ (Μονάδες 6)

β) ΒΔ = ΓΕ (Μονάδες 10)

γ) $\Delta\widehat{B}\Gamma = E\widehat{\Gamma}B$ (Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΓΔ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ

ΑΔ = ΑΕ

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (ως κατακορυφήν)

άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π είναι ίσα οπότε ΒΕ = ΓΔ.

β) Είναι ΒΔ = ΒΑ + ΑΔ και ΓΕ = ΓΑ + ΑΕ όμως ΑΒ = ΓΑ και ΑΔ = ΑΕ επομένως ΒΔ = ΓΕ.

γ) Είναι $\Delta\widehat{B}\Gamma = E\widehat{\Gamma}B$ ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

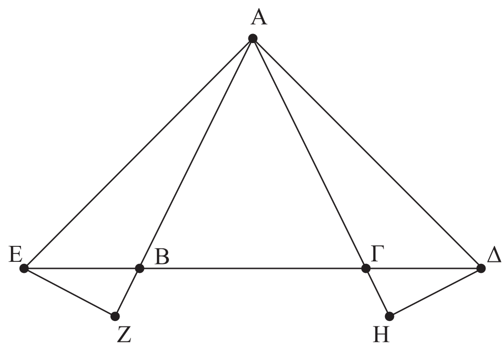
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 12)

β) ΕΖ = ΔΗ (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΓΔ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση)

ΒΕ = ΓΔ (υπόθεση)

$\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ (ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών Β και Γ)

άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π είναι ίσα οπότε ΑΕ = ΑΔ.

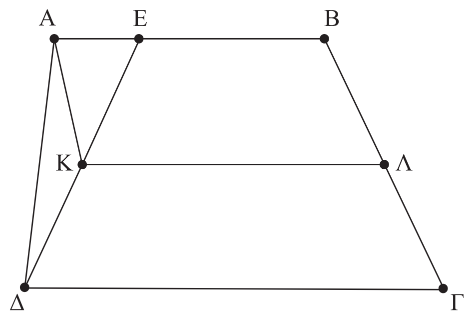
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΖΒ και ΓΗΔ είναι ίσα αφού ΕΒ = ΓΔ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \hat{\mathrm{B}}$, $\mathrm{H}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ οπότε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{H}\hat{\Gamma}\Delta$. Επομένως από την ισότητα των παραπάνω τριγώνων προκύπτει ότι ΕΖ = ΔΗ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με ΑΒ = 3, ΓΔ = 4. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε ΑΕ = 1. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι $ΚΛ = \dfrac{ΕΒ + ΔΓ}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$ (ΕΒ = ΑΒ – ΑΕ = 3 – 1 = 2).

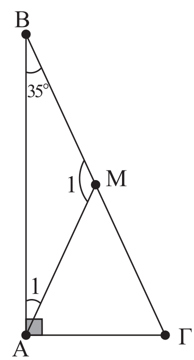
β) Επειδή η διάμεσος ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ είναι παράλληλη στις βάσεις άρα ΚΛ // ΕΒ οπότε ΚΛ // ΑΒ. Επίσης ΚΛ = 3 = ΑΒ άρα το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 35°$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow 35° + \widehat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 55°$.

β) Η διάμεσος ΑΜ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας δηλαδή ΑΜ = ΜΒ επομένως το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B} = 35°$ οπότε $\widehat{M}_1 = 180° - 35° - 35° \Leftrightarrow \widehat{M}_1 = 110°$.

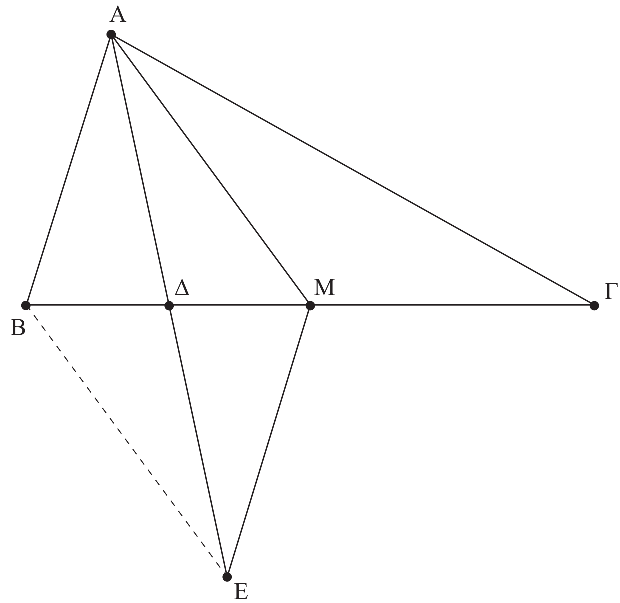
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ΒΓ = 2ΑΒ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε ΑΔ = ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) ΜΕ = ΜΓ (Μονάδες 13)



Λύση

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (ΑΔ = ΔΕ και ΒΔ = ΔΜ).

β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΜ προκύπτει ότι $ΜΕ = ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$ (αφού από την υπόθεση ισχύει ΒΓ = 2ΑΒ).

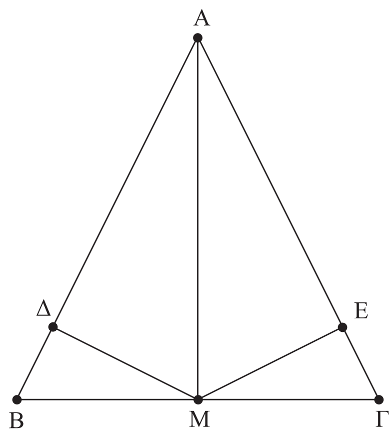
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ:
είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta} = \hat{E} = 90°$)
ΜΔ = ΜΕ
ΑΜ κοινή πλευρά
άρα είναι ίσα.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα αφού έχουν ΜΒ = ΜΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού ΑΒ = ΑΓ). Επομένως από την ισότητά τους προκύπτει ότι ΜΔ = ΜΕ.

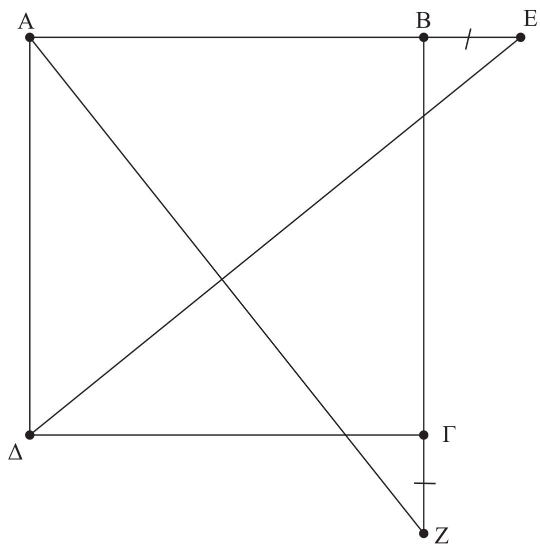
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

$\hat{A} = \hat{B} = 90°$

ΑΒ = ΑΔ (ΑΒΓΔ τετράγωνο)

ΒΖ = ΑΕ αφού ΒΖ = ΒΓ + ΓΖ και ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ (ΒΕ = ΓΖ , ΑΒ = ΒΓ)άρα είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΖ και ΑΕΔ προκύπτει ότι $\mathrm{A\hat{Z}B} = \mathrm{A\hat{E}\Delta}$ όμως $\mathrm{A\hat{E}\Delta} = \mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ άρα και $\mathrm{A\hat{Z}B} = \mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

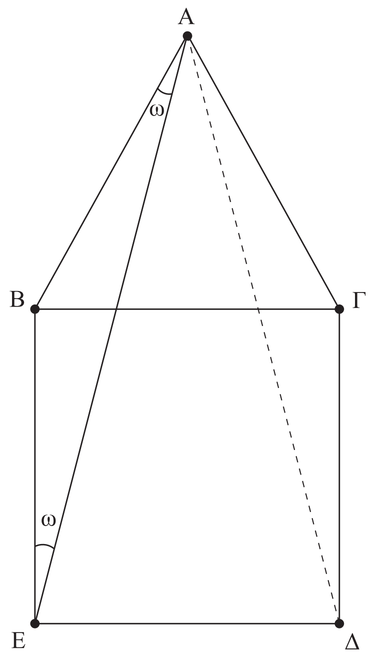
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $A\hat{B}E$ (Μονάδες 8)

ii. $B\hat{E}A$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Είναι $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}E = 60° + 90° = 150°$.

ii. Έχουμε $B\hat{E}A = B\hat{A}E = \omega$ (αφού ΑΒ = ΒΕ) οπότε $2\omega + A\hat{B}E = 180° \Leftrightarrow$ $2\omega = 180° - 150° \Leftrightarrow 2\omega = 30° \Leftrightarrow \omega = 15°$ ή $B\hat{E}A = 15°$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

$AB = A\Gamma$

$BE = \Gamma\Delta$

$A\hat{B}E = 150° = A\hat{\Gamma}\Delta$

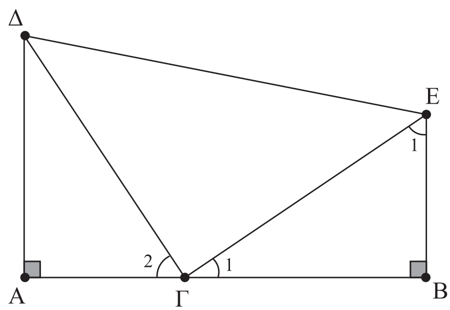
άρα από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π είναι ίσα οπότε $AE = A\Delta$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες Α, Β είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ = ΒΓ και ΑΓ = ΒΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40°$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:
$\hat{A} = \hat{B} = 90°$
ΑΔ = ΒΓ
ΑΓ = ΒΕ
άρα είναι ίσα.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα θα έχουν και ΓΔ = ΓΕ δηλαδή το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Επίσης είναι και ορθογώνιο αφού $\hat{\Gamma}_1 = 40°$ άρα $\hat{E}_1 = 50°$ οπότε και $\hat{\Gamma}_2 = 50°$ (από την ισότητα των τριγώνων). Επομένως $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 40° + 50° = 90°$ άρα και $\Delta\hat{\Gamma}E = 90°$.

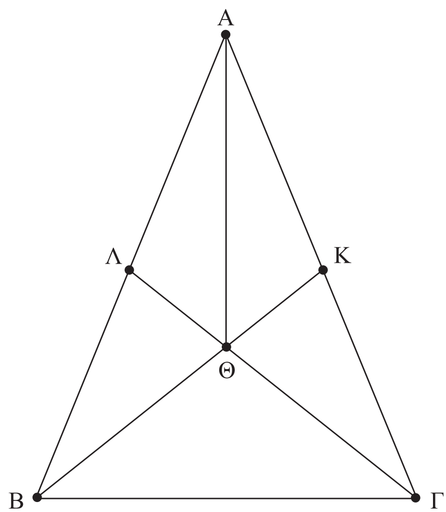
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες. (Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΛΓ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ

ΑΚ = ΑΛ (ως μισά ίσων πλευρών)

$\widehat{A}$ κοινή

άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΒΚ = ΓΛ

β) Είναι $B\Theta = \frac{2}{3}BK$ και $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma\Lambda$ (αφού Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ) οπότε από

το ερώτ.α έχουμε ΒΘ = ΓΘ.

Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ έχουν:

ΒΘ = ΓΘ

ΑΘ κοινή

ΑΒ = ΑΓ

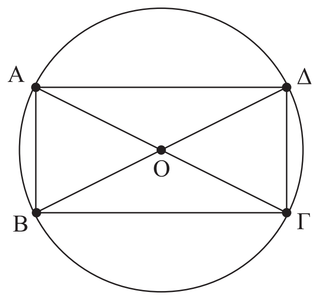
άρα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΔ ως ακτίνες του κύκλου επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται άρα είναι παραλληλόγραμμο και επειδή είναι και ίσες (ΑΓ = ΒΔ) αυτό θα είναι ορθογώνιο.

β) Για να είναι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ τετράγωνο θα πρέπει να είναι και ρόμβος οπότε πρέπει οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα.

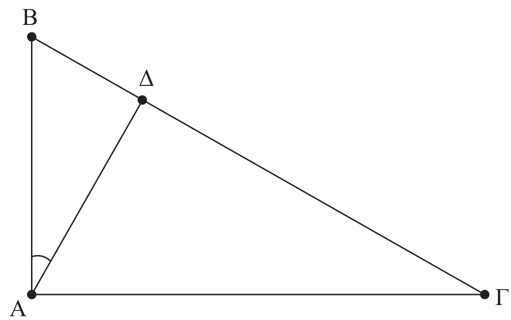
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και ΑΔ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ έχουμε $2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30°$ και $\hat{B} = 60°$.

β) Αφού $A\Delta \perp B\Delta$ άρα $B\hat{A}\Delta + \hat{B} = 90°$ ή $B\hat{A}\Delta + 60° = 90° \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 30°$.

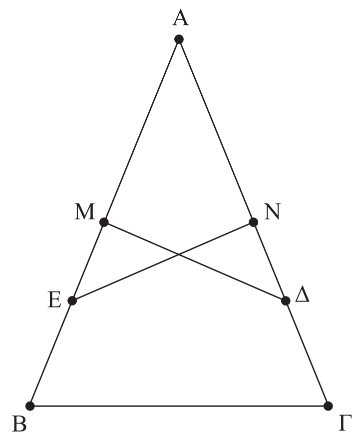
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ η γωνία $B\hat{A}\Delta = 30°$ επομένως $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΝΕ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΝΕ (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:

$\widehat{M} = \widehat{N} = 90°$

$\widehat{A}$ κοινή

ΜΔ = ΝΕ

οπότε είναι ίσα άρα και ΑΜ = ΑΝ ή $\frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = A\Gamma$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

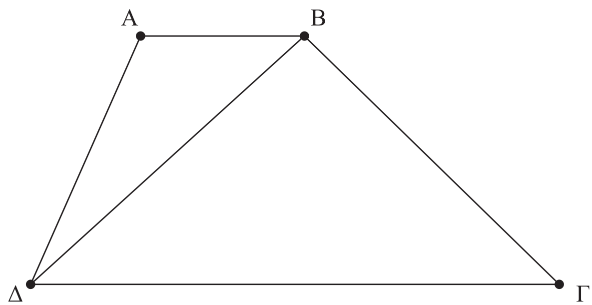
β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε και ΑΜ = ΑΝ ως μισά ίσων πλευρών οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ θα είναι ίσα αφού έχουν και $\widehat{A}$ κοινή. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι ΜΔ = ΕΝ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110°$ και $A\hat{\Delta}B = 25°$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ. (Μονάδες 11)

β) Τη γωνία Α. (Μονάδες 14)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές (ΒΔ = ΒΓ) άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$ οπότε έχουμε $\Delta\hat{B}\Gamma + 2\hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow 110° + 2\hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35°$.

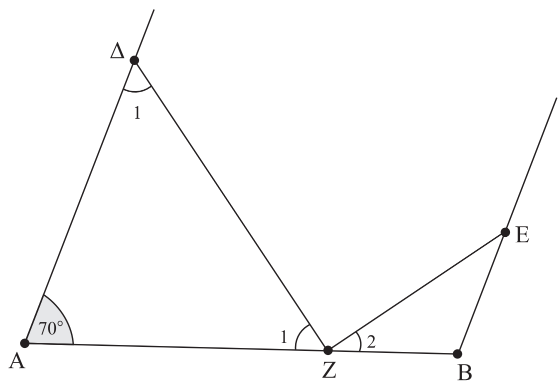
β) Είναι $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ) και $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 35°$ οπότε $\hat{\Delta} = A\hat{\Delta}B + B\hat{\Delta}\Gamma = 25° + 35° = 60°$. Επομένως $\hat{A} = 180° - \hat{\Delta} = 180° - 60° = 120°$ διότι $\hat{A}$, $\hat{\Delta}$ εντός και επί τα αυτά (ΑΒ // ΔΓ).

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ = ΑΖ, ΒΕ = ΒΖ και $\widehat{A} = 70°$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\widehat{Z}E = 90°$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές (ΑΔ=ΑΖ) οπότε $\widehat{Z}_1 = \widehat{\Delta}_1$ επίσης $\widehat{A} + \widehat{Z}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180°$ $\Leftrightarrow$ $70° + \widehat{Z}_1 + \widehat{Z}_1 = 180°$ $\Leftrightarrow$ $2\widehat{Z}_1 = 110°$ άρα $\widehat{Z}_1 = 55°$ επομένως $\widehat{Z}_1 = \widehat{\Delta}_1 = 55°$.

Είναι $\widehat{B} + \widehat{A} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά) οπότε $\widehat{B} + 70° = 180°$ $\Leftrightarrow$ $\widehat{B} = 110°$.

Το τρίγωνο ΒΖΕ είναι ισοσκελές άρα $\widehat{Z}_2 = \widehat{E}_1$ οπότε $2\widehat{Z}_2 + \widehat{B} = 180°$ $\Leftrightarrow$ $2\widehat{Z}_2 + 110° = 180°$ $\Leftrightarrow$ $2\widehat{Z}_2 = 70°$ $\Leftrightarrow$ $\widehat{Z}_2 = 35°$ καθώς και $\widehat{E}_1 = 35°$.

β) Επειδή $\widehat{Z}_1 + \widehat{Z}_2 = 55° + 35° = 90°$ η γωνία $\Delta\widehat{Z}E = 180° - 90° = 90°$.

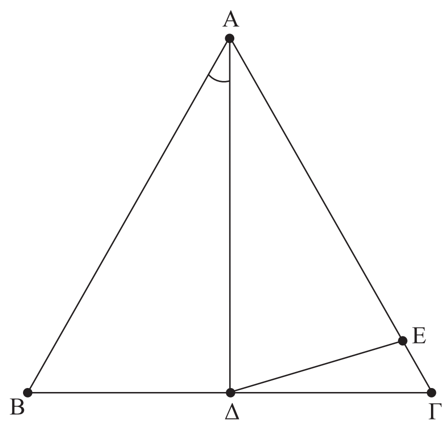
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $B\widehat{A}\Delta = 30°$.
Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή η $B\widehat{A}\Delta$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ είναι 30° άρα $\widehat{B} = 60°$ οπότε και $\widehat{\Gamma} = 60°$ (αφού ΑΒ = ΑΓ) επομένως και η $\widehat{A} = 60°$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Είναι $\Delta\widehat{A}E = 60° - 30° = 30°$ και ΑΔ = ΑΕ οπότε $A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

γ) Είναι $E\widehat{\Delta}\Gamma + A\widehat{\Delta}E = 90°$ (αφού $A\Delta \perp B\Gamma$) οπότε $E\widehat{\Delta}\Gamma + 75° = 90°$ άρα $E\widehat{\Delta}\Gamma = 15°$.